1/ Convergence d'une serie

a/ Définition. Soit (U_n) suite et $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ la somme partielle. Si la suite (S_n) converge vers ℓ, on dit que la serie de terme general U_n, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente vers ℓ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ $\left(\sum_{n\geq 0} U_n = \ell \right)$

Remarque: Si la suite (S_n) diverge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ diverge :

Exemple 1 : $U_n = n$; $S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

On a $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est divergente

Exemple 2 : Serie geometrique ; c'est 1 serie de t.g $U_n = a^n$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ c.v $\iff -1 < a < 1$; $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

En general : $\sum_{n=p}^{+\infty} a^n$ c.v $\iff -1 < a < 1$; $\sum_{n=p}^{+\infty} a^n = \frac{a^p}{1-a}$

b/ Remarque: La nature de la serie reste inchangée, si on supprime un nombre fini de termes

2/ Propriétés

a/ Condition necessaire de convergence

Theoreme : Si $\sum U_n$ converge alors $\lim_{\infty} U_n = 0$

Consequence : Si $\lim_{\infty} U_n \neq 0$ alors $\sum U_n$ diverge

Remarque : la reciproque du th n'est pas vraie

Exemple : $U_n = \frac{1}{n}$; $\lim_{\infty} U_n = 0$ mais $\sum U_n$ diverge

b/ Linearité :

Theoreme : Si $\sum U_n$ et $\sum V_n$ convergent alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (aU_n + bV_n)$ c.v et $\sum_{n=0}^{+\infty} (aU_n + bV_n) = a\sum_{n=0}^{+\infty} U_n + b\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$

c/ Condition de Cauchy

$\sum U_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n)$ converge $\Leftrightarrow (S_n)$ suite de Cauchy

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m>n>n_0 : |S_m - S_n| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m>n>n_0 : |U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_m| < \varepsilon$

Application : la serie dite serie harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge

En effet : $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$

3/ Series à termes positifs

a/ Definition et Remarque

- la serie $\sum U_n$ est une serie à t.p si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$
- la suite (S_n) est croissante $(S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0)$

b/ Proposition : Si $\sum U_n$ est une serie à t.p alors

$\sum U_n$ c.v $\Leftrightarrow (S_n)$ majorée ; $\sum U_n$ div $\Leftrightarrow \lim_{\infty} S_n = +\infty$

c/ Critère de Comparaison : Si $0 \leq U_n \leq V_n$ et si

$\sum V_n$ converge alors $\sum U_n$ converge

$\sum U_n$ diverge alors $\sum V_n$ diverge

d/ Critère de l'equivalence : $U_n > 0$, $V_n > 0$

Déf : 2 suites (U_n) et (V_n) sont equivalentes, et on note $U_n \sim V_n$ si $\lim_{\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$

Th : Si $U_n \sim V_n$ alors $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature

Corollaire : Soit $U_n > 0$ et $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} U_n = \ell \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Si $\alpha > 1$ alors $\sum U_n$ converge (même chose si $\ell = 0$)

Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum U_n$ diverge (même chose si $\ell = +\infty$)

e/ Serie et Integrale generalisée

Theoreme : Soit f une fonction continue, positive, decroissante sur $[1, +\infty[$ avec $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ et soit la suite $U_n = f(n)$ alors la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ et l'integrale generalisée $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ sont de même nature

Application : Serie de Riemann $(\alpha \in \mathbb{R})$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

f/ Critère de Cauchy : $U_n > 0$; On pose $\lim_{+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell$

- Si $\ell < 1$ alors la serie $\sum U_n$ C.V
- Si $\ell > 1$ alors la serie $\sum U_n$ div
- Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure

g/ Critère de D'Alembert : $U_n > 0$; On pose $\lim_{+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$

- Si $\ell < 1$ alors la serie $\sum U_n$ C.V
- Si $\ell > 1$ alors la serie $\sum U_n$ div
- Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure

4/ Serie absolument convergente (A.C)

a/ Définition : la serie $\sum U_n$ est dite A.C si la serie $\sum |U_n|$ est convergente

b/ Theoreme : Si $\sum U_n$ est A.C alors $\sum U_n$ est C.V
(c.a.d si $\sum |U_n|$ C.V alors $\sum U_n$ C.V)

c/ Remarque : la reciproque du theoreme n'est pas vraie :

Exemple : $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $\sum |U_n| = \sum \frac{1}{n}$ div mais $\sum U_n$ C.V

5/ Serie alternée

a/ Définition : Toute serie de la forme $\sum_{n \geq 0} (-1)^n V_n$; où $V_n > 0$

b/ Critère de convergence : Si la suite (V_n) est decroissante

et si $\lim V_n = 0$ alors la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n V_n$ est convergente

Exemple : . la serie harmonique alternée : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergent

6/ Régle D'Abel

Theoreme : Soient (a_n) et (b_n) 2 suites et $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

Si les 3 conditions suivantes sont verifiées

a/ $\sum_{n\geq 0} |a_{n+1} - a_n|$ converge b/ $\lim a_n = 0$ c/ (S_n) suite bornée

alors la serie $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ est convergente

Corollaire 1 : Si (a_n) suite decroissante avec $\lim_{\infty} a_n = 0$

et (b_n) suite telle que $\sum_{k=0}^{n} |b_k|$ est bornée alors la serie

$\sum a_n b_n$ est convergente

7/ Theoreme de condensation de Cauchy

Theoreme : (a_n) suite decroissante positive alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

Application : la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est convergente

?/ Comparaison par passage à la limite

Theoreme : $a_n > 0$; $b_n > 0$ posons $\lim_{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$

si $\ell \neq 0$ alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature

si $\ell = 0$ alors si $\sum b_n$ c.v alors $\sum a_n$ c.v

si $\ell = \infty$ alors si $\sum a_n$ c.v alors $\sum b_n$ c.v